RESUMEN RAÍCES (8° A, B)

La raíz cuadrada ($\sqrt{}$) de un número natural "**b**" corresponde a un único número positivo "**a**" que cumple: $a^2 = b$ y se representa como $\sqrt{b} = a$.

1. PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

i. Multiplicación de raíces de igual índice

Se conserva el índice de la raíz y se multiplican las cantidades sub-radicales.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ej: $\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{7 \cdot 8}$

ii. División de raíces de igual índice.

Se conserva el índice de la raíz y se dividen las cantidades sub-radicales.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

Ej: $\sqrt[2]{7} : \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{7 : 5}$

iii. Raíz de una raíz

Se conserva la cantidad sub-radical y se multiplican los índices de las raíces.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ej: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[3 \cdot 4]{7}$

iv. Factor de una raíz como factor sub-radical

Se conserva el índice de la raíz y el factor multiplica a la cantidad sub-radical elevado al índice de la raíz.

$$a \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n \cdot b^m}$$

Ej: $7 \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 9}$

v. Raíz como potencia

Para escribir una raíz como potencia de exponente fraccionario, se debe dividir al exponente de la cantidad sub-radical por el índice de la raíz.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ej: $\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$

2. RELACIÓN DE ORDEN DE LAS RAÍCES

Sean a y b números reales mayores o iguales a cero y n, m números naturales mayores que 1. Para ordenar raíces podemos utilizar alguno de los siguientes métodos, según sea el caso.

i. Iguales índices

Para ordenar raíces de igual índice y cantidades sub-radicales positivas, basta comparar las cantidades sub-radicales. Si se cumple que a < b, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Ejemplo: Comparar $\sqrt{3}\ y\ \sqrt{4}$

Solución: Dado que tienen igual índice, se cumple que $\sqrt{3} < \sqrt{4}$

ii. Iguales cantidades sub-radicales

Para ordenar raíces de igual cantidad sub-radicales, basta comparar los índices de las raíces.

Ejemplo: Comparar $\sqrt[2]{16}\ y\ \sqrt[4]{16}$

Solución: Dado que tienen igual cantidad sub-radical mayor que 1, se cumple que, a mayor índice, menor es el valor de la raíz, por lo tanto $\sqrt[2]{16} > \sqrt[4]{16}$

Ejemplo: Comparar $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\ y\ \sqrt[2]{\frac{1}{16}}$

Solución: Dado que tienen igual cantidad sub-radical menor que 1, se cumple que a mayor índice mayor es el valor de la raíz, por lo tanto $\sqrt[2]{\frac{1}{16}} < \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

iii. Distintos índices y distintas cantidades sub-radicales

En caso que las raíces tengan distinto índice y distinta cantidad sub-radical, es posible elevar las raíces al m.c.m de sus índices.

Ejemplo: Comparar $\sqrt[2]{5}\ y\ \sqrt[3]{10}$

Solución: Elevamos ambas raíces a 6 (6 es el m.c.m entre 2 y 3).

$$\left(\sqrt[2]{5}\right)^6 = (5)^{\frac{6}{2}} = 5^3 = 125$$

$$\left(\sqrt[3]{10}\right)^6 = (10)^{\frac{6}{3}} = 10^2 = 100$$

3. SUMA DE RAICES

Para sumar raíces, éstas deben tener igual índice e igual cantidad sub–radical.

Ejemplo 1: $3\sqrt[2]{5} + 8\sqrt[2]{5} = 11\sqrt[2]{5}$ → sumamos (3 + 8) y agregamos la $\sqrt{5}$.

Ejemplo 2: $\sqrt[2]{2} + 7\sqrt[2]{2} = 8\sqrt[2]{2}$ → sumamos (1 + 7) y agregamos la $\sqrt{2}$.

En caso de no tener igual cantidad sub-radical, se debe intentar igualarlas, aplicando propiedades $\left(\sqrt[n]{a^n \cdot b^m} = a \cdot \sqrt[n]{b^m}\right)$ y luego se puede sumar.

Ejemplo 1:

$$\sqrt{50}+\sqrt{18}=$$

Se reescriben las raíces de la siguiente forma:

$$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$$

Finalmente se suman las raíces, quedando:

$$5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

Ejemplo 2:

$$\sqrt{5}+\sqrt{27}-\sqrt{20}+\sqrt{48}=$$

Se reescriben las raíces de la siguiente forma:

$$\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=\sqrt{3^2\cdot 3}=3\sqrt{3}$$
$$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 5}=2\sqrt{5}$$
$$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{4^2\cdot 3}=4\sqrt{3}$$

Finalmente se suman las raíces, quedando:

$$\sqrt{5}+3\sqrt{3}-2\sqrt{5}+4\sqrt{3}$$
$$=-\sqrt{5}+7\sqrt{3}$$

4. RACIONALIZACION

Racionalizar el denominador de una fracción, consiste en convertir una fracción, cuyo denominador es irracional, en una fracción equivalente cuyo denominador sea racional.

$$\frac{a}{\sqrt{b}}$$

Si se tiene una raíz en forma de fracción, se realizarán operaciones para eliminar la raíz del denominador de la siguiente forma:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Ejemplo 1:

Al racionalizar $\dfrac{10}{2\sqrt{10}}$ se obtiene

Solución 1:

$$\frac{10}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{2\sqrt{10^2}} = \frac{10\sqrt{10}}{2 \cdot 10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Ejemplo 2:

Al racionalizar

$$\frac{5}{5-\sqrt{2}} =$$

Solución 2:

Para realizar esta racionalización, debe considerar la fórmula de sumas por diferencia de binomios perfectos

Suma por diferencia:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Obteniéndose que:

$$\frac{5}{5-\sqrt{2}} = \frac{5}{5-\sqrt{2}} \cdot \frac{5+\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} = \frac{5\left(5+\sqrt{2}\right)}{25-2} = \frac{5\left(5+\sqrt{2}\right)}{23}$$

5. EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular el siguiente producto de raíces cúbicas

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} =$$

Solución 1:

$$= \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8}$$
$$= \sqrt[3]{2^3} = 2$$

Observa que la raíz se cancela porque el sub-radical es una potencia con exponente 3 y el orden de la raíz es 3.

2. Calcular el siguiente producto de raíces quintas

$$\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{-4} \cdot \sqrt[5]{-2} =$$

Solución 2:

$$= \sqrt[5]{4 \cdot (-4) \cdot (-2)}$$

$$= \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

3. Calcular los siguientes cocientes de raíces cuadradas

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$$

Solución 3:

Aplicamos la propiedad del cociente de raíces

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} =$$

$$= \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$$

4. Calcular los siguientes cocientes de raíces cubicas.

$$\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{-6}}$$

Solución 4:

$$\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{-6}} = \sqrt[3]{\frac{48}{-6}} =$$

$$= \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} =$$

$$= -2$$

5. Calcular el siguiente cociente de raíces cuadradas y cúbicas:

$$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt[2]{5}$$

Solución 5:

Observa que no todas las raíces tienen el mismo orden. Como tenemos un producto de raíces, podemos cambiar el orden:

$$= \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[2]{5}$$

Así, podemos multiplicar las dos raíces de la izquierda y las dos de la derecha porque tienen el mismo orden:

$$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \cdot \sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[2]{5} =$$

$$= \sqrt[3]{6 \cdot \frac{9}{2}} \cdot \sqrt[2]{5 \cdot 5} =$$

$$= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[2]{25} =$$

$$= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[2]{5^2} =$$

$$= 3 \cdot 5 = 15$$

6. Simplificar:

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^3$$

Solución 6:

Aplicamos la propiedad del producto de raíces del mismo orden:

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{12}}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}\right)^3$$

Aplicamos la propiedad del cociente de raíces del mismo orden:

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{6}{12}}\right)^3$$

Simplificamos la fracción:

$$\left(\sqrt{\frac{6}{12}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3$$

Simplificamos más:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

La potencia de un cociente es el cociente de sus potencias:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1^3}{\sqrt{2}^3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Racionalizando el denominador:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

6. EJERCICIOS PROPUESTOS PSU

1.

$\sqrt{6+\frac{1}{4}}-\sqrt{5+\frac{1}{16}}+\sqrt{8-\frac{4}{25}}=$

(DEMRE 2008)

A) $\frac{61}{20}$

B) $\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{2}{5}$

C) $\frac{151}{20}$

D) $\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{8}+\frac{7}{20}$

E) Ninguno de los valores anteriores

2.

Al simplificar la expresión $\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$ resulta

(DEMRE 2005)

A) $2\sqrt{3}$

B) $2+\sqrt{14}$

C) $2+\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{7}+\sqrt{2}$

E) 4

3.

¿Cuál de las siguientes expresiones tiene un valor diferente a $2\sqrt{5}$?

(DEMRE 2005)

A) $\sqrt{5}+\sqrt{5}$

B) $\sqrt{20}$

C) $\sqrt{5+5}$

D) $\frac{\sqrt{500}}{5}$

E) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

4.

$\sqrt{12}-\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{3}=$

(DEMRE 2004)

A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

B) $\sqrt{15}$

C) $\sqrt{10}+\sqrt{5}$

D) $\sqrt{20}-\sqrt{5}$

E) Ninguno de los valores anteriores

5.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} =$$

(DEMRE 2011)

A) $1+\sqrt{8}$

B) $\sqrt{8}$

C) $\sqrt{5}$

D) 3

E) Ninguno de los valores anteriores

6.

$$(\sqrt{50}+\sqrt{512}-\sqrt{242}) : \sqrt{2} =$$

(DEMRE 2007)

A) 10

B) $10\sqrt{2}$

C) $8\sqrt{5}$

D) 32

E) 40

7.

El número $\sqrt{2^{16}}$ es igual a

(DEMRE 2009)

A) 2^4

B) $\sqrt{32}$

C) $(\sqrt{2})^4$

D) 2^{14}

E) Ningunos de los anteriores

8.

Si se ordenan de menor a mayor los siguientes números: $\sqrt{5}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ y $\frac{11}{3}$, entonces el término del medio es

(DEMRE 2014)

A) $\sqrt{5}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $3\sqrt{2}$

D) $\sqrt{7}$

E) $\frac{11}{3}$